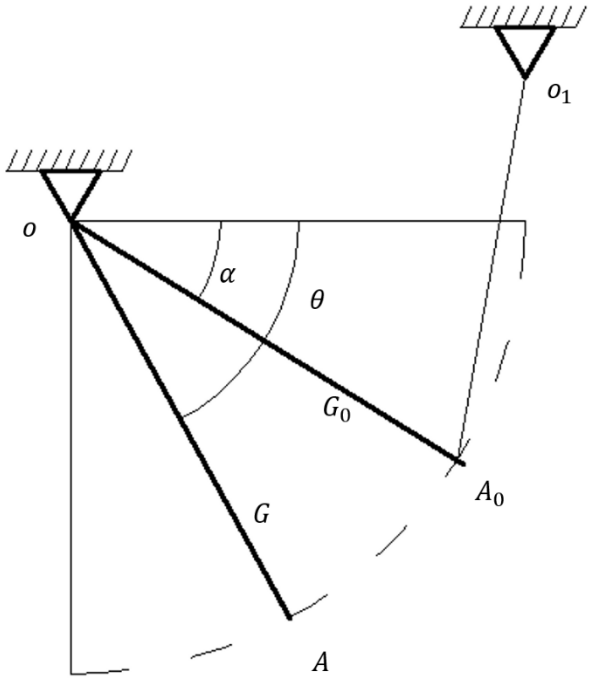
# تحريك الجسم الصلب
# (الحركة المستوية العامة)

م.غيث برهاني

02/12/2015

**المسألة الأولى:**

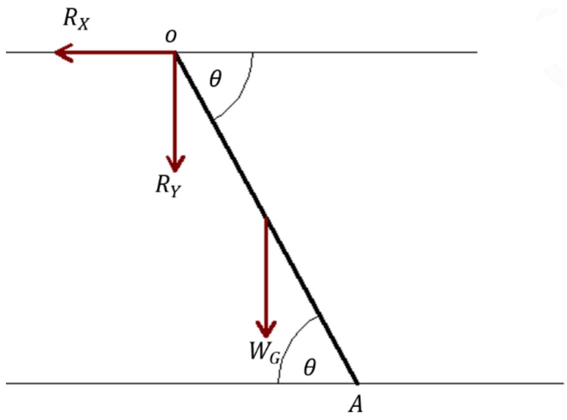



قضيب **غير متجانس** طوله $l$ كتلته $M$ أحد أطرافه مثبت على مفصل $O$ كما هو موضح في الشكل بحيث يكون بعد مركز ثقل الساق عن المفصل $\overline{OG} = \frac{3}{4}l$ وعزم عطالتها حول مركز ثقلها $I_G = m.\rho_G^2$ حيث $\rho_G = \frac{l}{4}$ ... نقطع الخيط لتبدأ الكرة حركتها من الوضع المحدد بالزاوية $\alpha$ والمطلوب:

أوجد السرعة الزاوية والتسارع الزاوي ورد فعل المسند(قوى الاتصال)(قوى القيد)

**الحل:**

لإيجاد السرعة الزاوية نطبق مبدأ العمل والطاقة على الجملة المتمثلة بالقضيب المتحرك حركة دورانية لا مركزية حول $O$ بين وضعين... من الوضع الابتدائي الساكن لحظة قطع الخيط والمحدد بالزاوية $\alpha$ .... إلى الوضع النهائي المحدد بالوضع العام $\theta$ بعد تحرير القضيب من قيوده:




$$I \dots E^{\theta} - E^{\alpha} = \sum w_{\alpha \to \theta} = w_{RX} + w_{RY} + w_{W_G}$$

لدينا:

$E^{\alpha} = 0$ في الوضع الابتدائي

$E^{\theta} = \frac{1}{2} I_O . \omega^2$ حركة دورانية مركزية حول O

$w_{RX} = w_{RY} = 0$ لأن القوة لا تنتقل

$$w_{W_G} = M.g.H = M.g.\overline{OG}(\sin\theta - \sin\alpha)$$
$$= \frac{3}{4} M.g.l(\sin\theta - \sin\alpha)$$

$$I_O = M.\rho_G^2 + M.(\overline{OG})^2 = \frac{1}{16} M.l^2 + \frac{9}{16} M.l^2 = \frac{10}{16} M.l^2$$ ...(نظرية هويغنز)

نعوض في $I$:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{10}{16} M.l^2\right).\omega^2 = \frac{3}{4} M.g.l(\sin\theta - \sin\alpha)$$

$$\Longrightarrow \omega^2 = \frac{12}{5}.\frac{g}{l}(\sin\theta - \sin\alpha)$$ الدوران مع عقرب الساعة

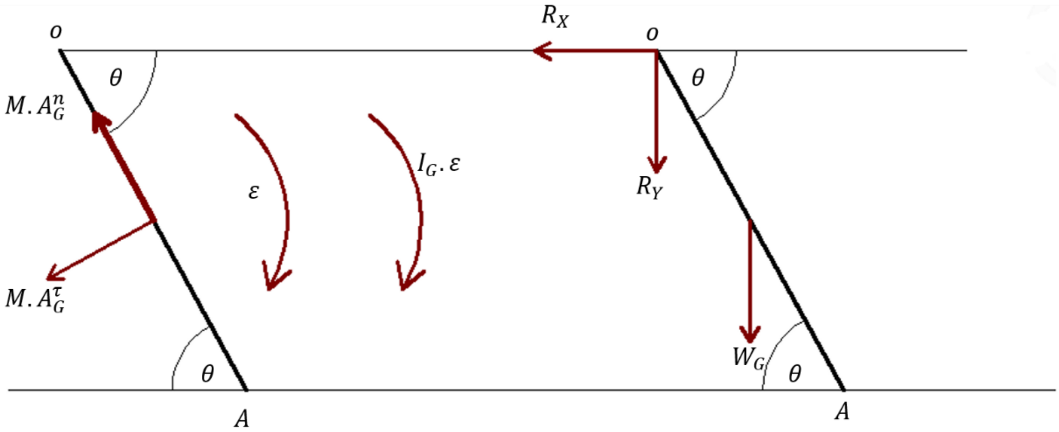
(لإيجاد التسارع الزاوي يمكن أن نشتق العلاقة لأننا درسناها ***<u>عند وضع عام</u>*** ولكن بما أن المطلوب أيضا قوى القيد نطبق علاقات المجموعة المكافئة)

لإيجاد التسارع الزاوي وقوى القيد المؤثرة على أجزاء الجملة نختار تطبيق علاقات المجموعة المكافئة على الجملة المتمثلة بالجائز بعد تحريره من قيوده:

$$(1) \dots M.\overrightarrow{A_G} = \sum \overrightarrow{F_G^e}$$

$$(2) \dots I_G.\vec{E} = M_G^e$$

ولتوضيح العلاقتين نرسم مخططاتها في الوضع المدروس:




بإسقاط العلاقة

(1):

$$(1) \;\cdots\cdots\leftarrow +: \quad M.A_G^{\tau}\sin\theta + M.A_G^{n}.\cos\theta = R_X$$

$$(2) \;\cdots\cdots\downarrow +: \quad M.A_G^{\tau}.\cos\theta - M.A_G^{n}.\sin\theta = +R_Y + W_G$$

نأخذ العزوم حول $O$:

$$(3) \;\cdots\cdots\circlearrowright +: \quad I_G.\varepsilon + M.A_G^{\tau}.\overline{OG}1 = W_G.\overline{OG}.\cos\theta$$

ولكن لدينا:

$$A_G^{\tau} = \varepsilon.\overline{OG} = \frac{3}{4}\varepsilon.l$$

$$A_G^{n} = \omega^2.\overline{OG} = \frac{12}{5}.\frac{g}{l}(\sin\theta - \sin\alpha).\left(\frac{3}{4}l\right)$$
$$= \frac{9}{5}g.(\sin\theta - \sin\alpha)$$

بالتعويض في العلاقة (3):

$$\frac{1}{16}M.l^2.\varepsilon + M\left(\frac{3}{4}.\varepsilon.l\right)\left(\frac{3}{4}l\right) = M.g\left(\frac{3}{4}l\right).\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{10}{16}M.l^2.\varepsilon = \frac{3}{4}M.g.l.\cos\theta \Rightarrow \varepsilon = \frac{6}{5}.\frac{g}{l}.\cos\theta$$

ومنه:

$$A_G^{\tau} = \frac{3}{4}.\varepsilon.l = \frac{3}{4}\left(\frac{6}{5}.\frac{g}{l}.\cos\theta\right)l = \frac{9}{10}g.\cos\theta$$

بالتعويض في المعادلة *(1)*:

$$M.(\frac{9}{10}g.\cos\theta).\sin\theta + M.\frac{9}{5}g\,(\sin\theta - \sin\alpha).\cos\theta = R_X$$

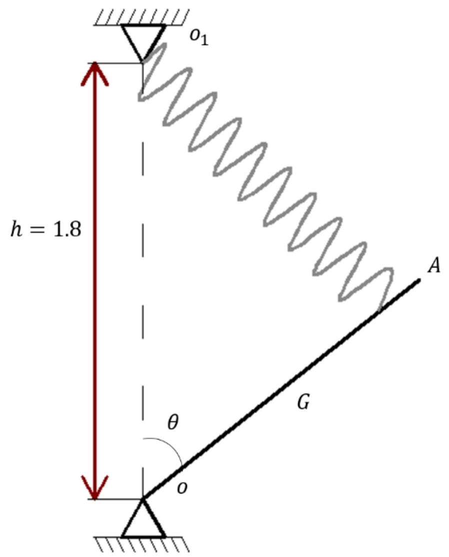
$$\frac{9}{10}W_G\cos\theta.\sin\theta + \frac{9}{5}.W_G.\sin\theta.\cos\theta - \frac{9}{5}W_G\sin\alpha\cos\theta = R_X$$

ومن المعادلة *(2)*:

$$M.\frac{9}{10}g.\cos^2\theta - M.\frac{9}{5}g.(\sin\theta - \sin\alpha).\sin\theta = +W_G + R_Y$$

$$-\frac{9}{10}W_G.\cos^2\theta + \frac{9}{5}.W_G.\sin^2\theta + \frac{9}{5}W_G\sin\theta.\sin\alpha - W_G = R_Y$$

**المسألة الثانية:**




جائز معدني متجانس طوله $l = 1.2(m)$ كتلته $m =$ $7.5\ (kg)$ عزم عطالته حول **أحد أطرافه** $I = \frac{1}{3}ml^2$ متصل مع نابض ثابت صلابته $k = 20\ N/m$... يبدأ النابض حركته من السكون من الوضع $\theta = 0$ حيث كان الجائز شاقوليا وكان النابض **بطوله الحر** والمطلوب:

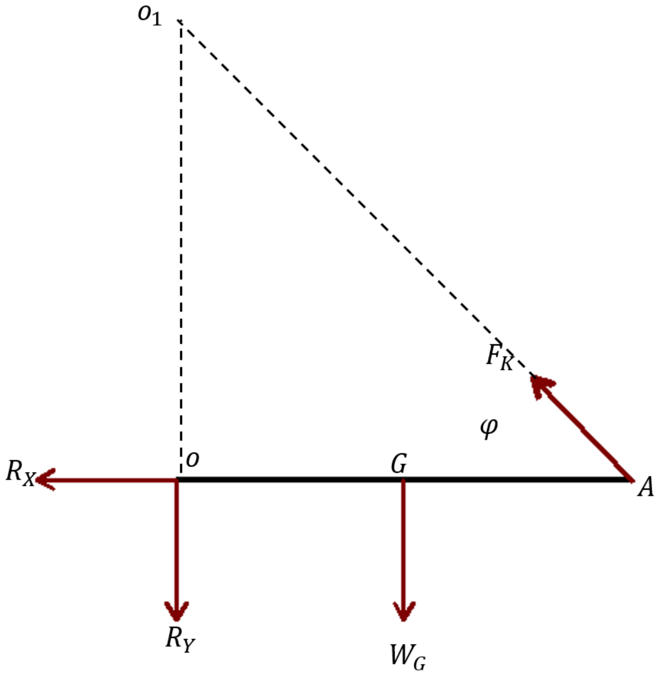
عند الوضع $\theta = 90°$ أوجد السرعة الزاوية للقضيب وتسارعه الزاوي وقوة اتصال الجائز(قوى القيد)(رد الفعل)

الحل:

## ملاحظة: (التزم بترتيب الطلبات)

لإيجاد السرعة الزاوية نطبق مبدأ العمل والطاقة على الجملة المتمثلة بالجائز المتحرك حركة دورانية لا مركزية حول o بين وضعين.. الوضع الابتدائي الساكن المتمثل بالزاوية $\theta = 0$...

والوضع النهائي المتمثل بالزاوية $\theta = 90$ بعد تحريره من قيوده:...




$$E^1 - E^0 = w_{RX} + w_{RY} + w_{WG} + w_{Fk}$$

لدينا: $w_{RX} = w_{RY} = 0$ لأن القوة لا تنتقل

ولدينا: $E^0 = 0$ لأن الحركة بدأت من السكون

ولدينا: $w_{WG} = m.g.\frac{l}{2}$ ، $w_{Fk} = \frac{k}{2}(\Delta l_{in}^2 - \Delta l_{fin}^2)$

حيث: $\Delta l_{in} = 0$ بطوله الحر ، $\Delta l_{fin} = \sqrt{l^2 + h^2} - (h - l)$ (هندسيا)

بالتعويض:

$$\frac{1}{2} I_O.\omega^2 = m.g.\frac{l}{2} - \frac{k}{2}\left(\sqrt{l^2 + h^2} - (h - l)\right)^2$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} ml^2\right).\omega^2 = m.g.\frac{l}{2} - \frac{k}{2}\left(\sqrt{l^2 + h^2} - (h - l)\right)^2$$

$$\omega^2 = \frac{3g}{l} - \frac{3k}{m}.\frac{\left(\sqrt{l^2 + h^2} - (h - l)\right)^2}{l^2}$$

$$\omega^2 = \frac{3(9.8)}{(1.2)} - \frac{3(20)}{(7.5)}.\frac{\left(\sqrt{1.8^2 + 1.2^2} - (1.8 - 1.2)\right)^2}{1.2^2}$$

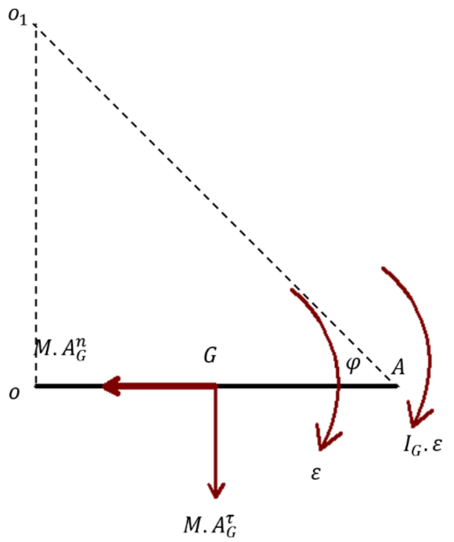
$$\Rightarrow \omega = 3.31\ rad.s^{-1} \circlearrowright$$

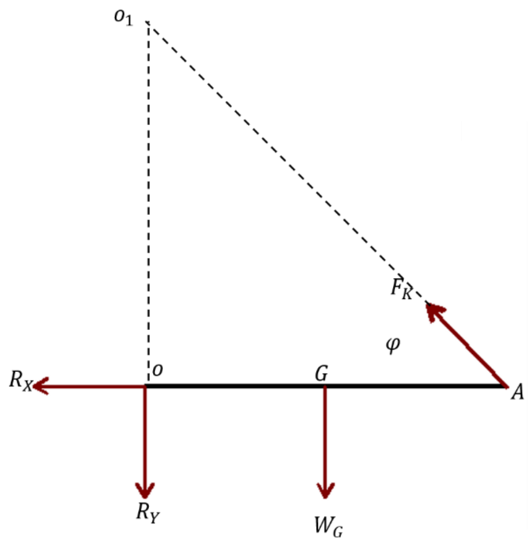
لإيجاد تسارعات عناصر الجملة والقوى المؤثرة عليهم نختار تطبيق معادلات الحركة أي:(معادلات المجموعة المكافئة للقوى الفعالة)

$$\sum \overrightarrow{F_G^e} = M.\vec{A}_G$$

$$I_G.\varepsilon = M_G^e$$

لتوضيح العلاقتين نرسم مخططاتها في الوضع المدروس:




$$\leftarrow: M.A_G^n = R_X + F_k.\sin\varphi = R_X + k.\Delta l_{fin}.\cos\varphi$$

$$(1) \cdots\cdots\Longrightarrow R_X = M.A_G^n + k.\Delta l_{fin}.\cos\varphi$$

$$\downarrow: M.A_G^\tau = W_G - F_k.\sin\varphi + R_Y$$

$$(2) \cdots\cdots\Longrightarrow R_Y = -W_G + M.A_G^\tau + k.\Delta l_{fin}.\sin\varphi$$

ندرس العزوم حول o:

$$\circlearrowleft: -I_G.\varepsilon - M.A_G^\tau.\frac{l}{2} = -W_G.\frac{l}{2} + F_k.l.\sin\varphi. = -W_G.\frac{l}{2} + k.l.\Delta l_{fin}.\sin\varphi \cdots\cdots(3)$$

لدينا: $I_o = I_G + M.(\overline{OG})^2 \Longrightarrow I_G = I_o - M.(\overline{OG})^2 = \frac{1}{12}m.l^2$

ولدينا: $\cos\varphi = \frac{l}{\sqrt{l^2+h^2}}$ , $\sin\varphi = \frac{h}{\sqrt{l^2+h^2}}$

ولدينا: $A_G^\tau = \varepsilon.(\overline{OG})$

نعوض في (3):

$$-\frac{1}{12}Ml^2.\varepsilon - M.\varepsilon.\left(\frac{l}{2}\right).\frac{l}{2} = -\frac{1}{2}M.g.l + k.l.\Delta l_{fin}\frac{h}{\sqrt{l^2+h^2}}$$

$$-\frac{1}{3}M.l^2.\varepsilon = -\frac{1}{2}M.g.l + k.l.\left(\sqrt{l^2+h^2} - (h-l)\right)\frac{h}{\sqrt{l^2+h^2}}$$

$$-\frac{1}{3}M.l^2.\varepsilon = -\frac{1}{2}M.g.l + k.l.h(1 - \frac{h-l}{\sqrt{l^2+h^2}})$$

$$\varepsilon = \frac{3}{2}.\frac{g}{l} - \frac{k.h}{3l.M}(1 - \frac{h-l}{\sqrt{l^2+h^2}})$$

$$\varepsilon = \frac{3}{2}.\frac{9.8}{1.2} - \frac{20\times 1.8}{3\times 1.2\times 7.5}(1 - \frac{1.8-1.2}{\sqrt{1.8^2+1.2^2}})$$

$$\varepsilon = 3.59\ rad.s^{-2} \ \circlearrowright$$

ومنه:

$$A_G^\tau = \varepsilon.\frac{l}{2} = 3.59\times\frac{1.2}{2} = 2.154\ m.s^{-2}$$

ولدينا: $A_G^n = \omega^2.\frac{l}{2} = 3.31^2.\frac{1.2}{2} = 6.57$

نعوض في العلاقة $(1)$

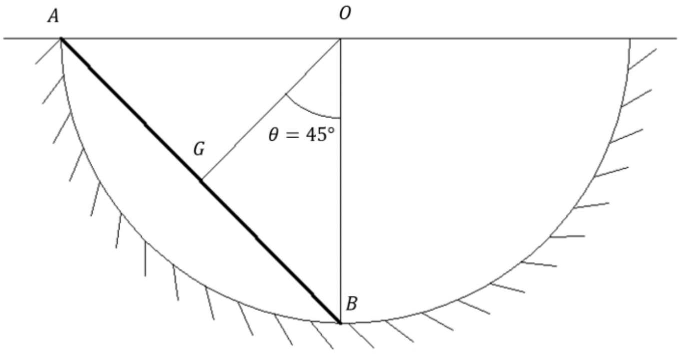
$$R_X = (7.5\times 6.57) + 20 \times\left(\sqrt{1.8^2+1.2^2} - (1.8-1.2)\right)\frac{1.2}{\sqrt{1.2^2+1.8^2}} = 31.918\ N$$

وبالتعويض أيضا في (2):

$$R_Y = (7.5\times 2.154) + 20\left(\sqrt{1.8^2+1.2^2} - (1.8-1.2)\right)\frac{1.8}{\sqrt{1.2^2+1.8^2}} - (7.5\times 9.8) = -31.33\ N$$

المسألة الثالثة:

**المسألة الثالثة:**




جائز معدني طوله $AB = \sqrt{2}l$ كتلته $M$ عزم عطالته حول مركز ثقله $I_G = \frac{1}{12}m.AB^2$ يستند على جدران تجويف شكله نصف دائرة نصف قطرها $l$... فإذا بدأ الجائز حركته من السكون في الوضع الابتدائي المحدد بالزاوية $\theta = 45°$ أوجد ما يلي:

مسار مركز الكتل $G$ وسرعته الزاوية وسرعته الخطية وتسارعه الزاوي وتسارعه الخطي

أوجد المركز الأني للسرع لحركة الوصلة $AB$

أوجد ردود الأفعال عند $A,B$

**الحل:**

لإيجاد مسا مركز الكتل $G$ نسقط موضع حركته على $x$ و $y$ حيث:

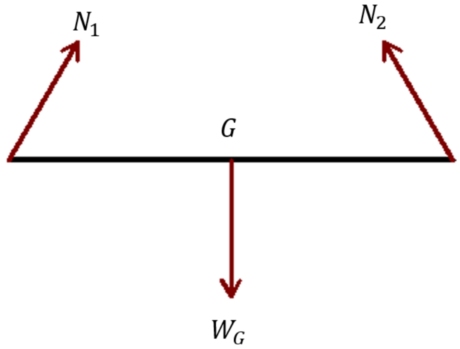
$$X_G = \frac{\sqrt{2}l}{2}.\sin\theta \quad , \qquad Y_G = \frac{\sqrt{2}l}{2}.\cos\theta$$

و بالجمع الهندسي نحصل على معادلة المسار:

$$X_G^2 + Y_G^2 = \frac{l^2}{2}$$

وهي معادلة دائرة نصف قطرها $r = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}m$ أي إن مركز كتل الساق يدور حول $O$

لإيجاد السرعة الزاوية نطبق مبدأ العمل والطاقة على الساق المتحركة حركة مستوية عامة بين وضعين.. الابتدائي الساكن المتمثل بالزاوية $\theta = 45°$ ...إلى النهائي المتمثل بالزاوية $\theta = 0$:




$$(1) \ldots\ldots E^1 - E^0 = \sum w = w_{N_A} + w_{N_B} + w_{W_G}$$

حيث لدينا:

$$E^1 = \frac{1}{2} I_G . \omega^2 + \frac{1}{2} M . v_G^2 \ ,, E^0 = 0$$

$w_{N_A} = w_{N_B} = 0$ (لأن القوة عمودية على الانتقال في كل لحظة)

$$w_{W_G} = M . g . \overline{OG}(1 - \cos\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} M . g . l(1 - \cos\theta)$$

$$v_G = \omega . \overline{OG} = \frac{1}{\sqrt{2}} . \omega . l \ ,, \qquad I_G = \frac{1}{12} m . l^2$$

لو ذكر قانون عزم العطالة من الشكل:

$$I_G = \frac{1}{12} m . \overline{AB}^2 \Rightarrow I_G = \frac{1}{12} m\left(\sqrt{2} l\right)^2 = \frac{1}{6} m . l^2$$

نعوض المعطيات في (1):

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} M . l^2\right) . \omega^2 + \frac{1}{2} M . \omega^2 \left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} M . g . l(1 - \cos\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{7}{24} M . l^2 . \omega^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} M . g . l(1 - \cos\theta) \Rightarrow \omega^2$$

$$= \frac{24}{7\sqrt{2}} . \frac{g}{l}(1 - \cos\theta) = \frac{24}{7\sqrt{2}} . \frac{g}{l}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

وهي ***قيمة عددية*** وليست علاقة لأننا طبقناها بين وضعين محددين ***وليس*** عند وضع عام (**أي أنه لا يمكن اشتقاقها**)

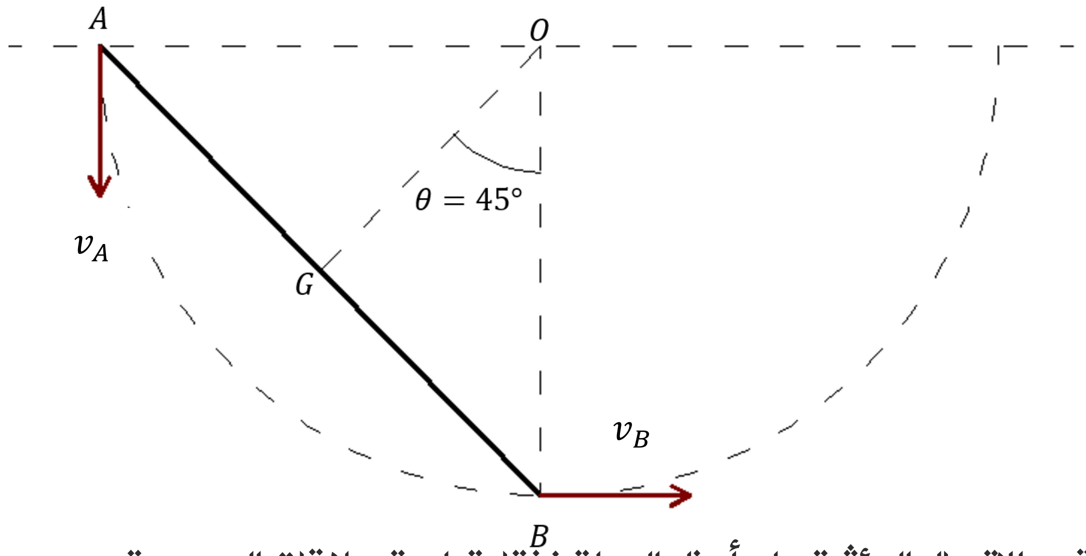
لتحديد المركز الأني نمدد مناحي متعامدة على مناحي السرعة فتتقاطع في $O$ في كل لحظة ومنه $O$ هو مركز أني ومركز دوران للقضيب $AB$ في آن واحد

ومنه أيضا:

$$\omega_1 = \omega$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon$$

حيث $\varepsilon_1$ و $\omega_1$ هي سرعة وتسارع دوران القضيب حول $O$

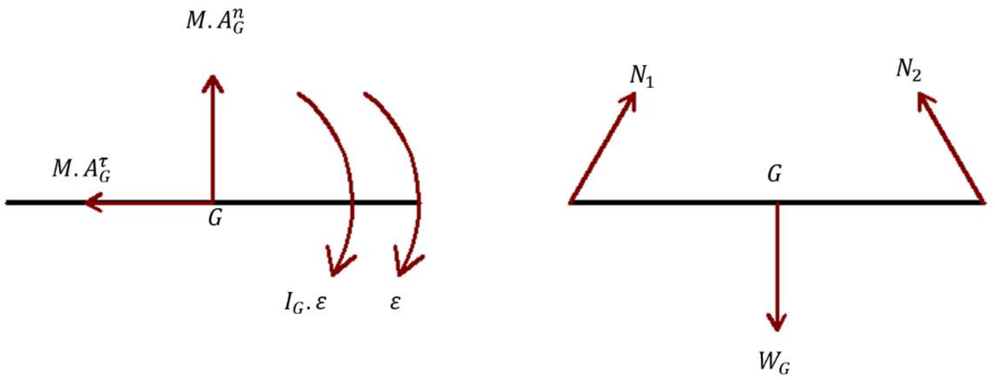



أما لإيجاد التسارع الزاوي وقوى الاتصال المؤثرة على أجزاء الجملة نختار تطبيق علاقات المجموعة المكافئة على الجملة المتمثلة بالجائز في الوضع المدروس:

$$(1') \;.....M.\overrightarrow{A_G} = \sum \overrightarrow{F_G^e}$$

$$(2') .........I_G.\vec{E} = \overrightarrow{M_G^e}$$

لتوضيح العلاقتين نرسم مخططاتها:




والأن باسقاط العلاقة

:(1')

$$(3) \;....\rightarrow +: \; -M.A_G^\tau = N_A.\cos\varphi - N_B.\cos\varphi$$

$$(4)\ldots\ldots\uparrow +:\quad M.A_0^n = N_A.\sin\varphi + N_B.\sin\varphi - W_G$$

وبأخذ العزوم حول المركز $o$ :

$$\circlearrowleft +:\quad I_G.\varepsilon + M.A_G^\tau = 0\ ,\qquad A_G^\tau = \varepsilon.\overline{IG} = \varepsilon.\overline{OG} = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon.l$$

$$\Rightarrow \varepsilon\left(I_G + \frac{1}{\sqrt{2}}M.l\right) = 0\ ,,,\left(I_G + \frac{1}{\sqrt{2}}M.l\right) \neq 0$$

$$\varepsilon = 0$$

بالتعويض في العلاقة (3):

$$(5)\ldots\ldots 0 = N_A.\cos\varphi - N_B.\cos\varphi \Rightarrow N_B.\cos\varphi = N_A.\cos\varphi \Rightarrow N_A = N_B$$

ولدينا: $A_G^n = \omega^2.\overline{OG} = \frac{24}{7\sqrt{2}}.\frac{g}{l}(1-\cos\theta)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}l\right) = \frac{12}{7}g(1-\cos\theta)$

نعوض في العلاقة (4):

$$M.\frac{12}{7}g(1-\cos\theta) = 2N_A.\sin\varphi - W_G$$

$$\Rightarrow N_A = \frac{6}{7}\frac{W_G}{\sin\varphi}(1-\cos\theta)$$

حيث: $\theta = 45°$ الوضع الابتدائي

$\varphi = 60°$ (مثلث متساوي الأضلاع)

$$\Rightarrow N_A = N_B = \frac{6}{7}\frac{W_G}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{12}{7\sqrt{3}}.W_G\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$